Factorización de la suma o la diferencia de dos potencias iguales

Ya estudiamos un cociente notable de la forma

$$\frac{a \pm b}{a \pm b}$$

Y se establecieron los siguientes criterios de divisibilidad:

- $(a^{\mathrm{n}} + b^{\mathrm{n}})$ es divisible por $(a + b)$, si n es impar.
- $(a^{\mathrm{n}} + b^{\mathrm{n}})$ nunca es divisible por $(a - b)$.
- $(a^{\mathrm{n}} - b^{\mathrm{n}})$ es divisible por $(a - b)$, si n es par o impar.
- $(a^{\mathrm{n}} - b^{\mathrm{n}})$ es divisible por $(a + b)$, si n es par.
- $(a^{\mathrm{n}} \pm b^{\mathrm{n}})$ puede escribirse como el producto de dos factores: $(a \pm\ b)$ y un polinomio de $n - términos$, así:
- si n es impar:

$$(a^{\mathrm{n}} + b^{\mathrm{n}}) = (a + b)(a^{\mathrm{n}-1} - a^{\mathrm{n}-2}b + a^{\mathrm{n}-3}b^2 - \ldots. + a^2b^{\mathrm{n}-3} - ab^{\mathrm{n}-2} + b^{\mathrm{n}-1})$$

- si n es par o impar:

$$(a^{\mathrm{n}} - b^{\mathrm{n}}) = (a - b)(a^{\mathrm{n}-1} + a^{\mathrm{n}-2}b + a^{\mathrm{n}-3}b^2 + \ldots. + a^2b^{\mathrm{n}-3} + ab^{\mathrm{n}-2} + b^{\mathrm{n}-1})$$

- si n es par:

$$(a^{\mathrm{n}} - b^{\mathrm{n}}) = (a + b)(a^{\mathrm{n}-1} - a^{\mathrm{n}-2}b + a^{\mathrm{n}-3}b^2 - \ldots. - a^2b^{\mathrm{n}-3} + ab^{\mathrm{n}-2} - b^{\mathrm{n}-1})$$

El primero y el último término del polinomio son $a^{\mathrm{n}-1}$ y $b^{\mathrm{n}-1}$ respectivamente. Los términos del polinomio restantes son productos de potencias de a y b, los exponentes de a disminuyen de 1 en 1 a partir del primer término y los exponentes de b aumentan de 1 en 1 a partir del segundo término.

Los signos de los términos del polinomio se asignan de acuerdo con las siguientes reglas:

Si $(a - b)$ es uno de los factores, los términos del polinomio son positivos.

Si $(a + b)$ es uno de los factores, los términos del polinomio son positivos y negativos alternadamente: $+, -, +, -, +, -$

Ejemplos

Enunciado

Factorizar $x^5 + 3125$

Solución

Paso 1. Identificamos $n - 5$, impar, y observamos que se tiene la suma de dos quintas potencias, de x y de 5.

$$x^5 + 3125 = (x)^5 + (5)^5$$

Paso 2. Formamos un binomio con los resultados obtenidos, en este caso como tenemos una suma de potencias impares, el binomio es la suma de los términos:

$$\underbrace{x}_{1°} + \underbrace{5}_{2°}$$

Paso 3. Conformamos el segundo factor, que será un polinomio de 5 términos. El primero y el último término del polinomio serán x y 5, respectivamente, elevados a la $5 - 1 = 4$

$$\underbrace{(x)^4}_{1}\ \underbrace{\quad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{3}\ \underbrace{\quad}_{4}\ \underbrace{(5)^4}_{5}$$

$$\underbrace{x^4}_{1}\ \underbrace{\quad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{3}\ \underbrace{\quad}_{4}\ \underbrace{625}_{5}$$

Paso 4. Escribimos los términos 2, 3 y 4 del polinomio, con las potencias de x y 5, así:

$$\underbrace{x^4}_{1}\ \underbrace{5x^3}_{2}\ \underbrace{5^2x^2}_{3}\ \underbrace{5^3}_{4}\ \underbrace{625}_{5}$$

$$\underbrace{x^4}_{1}\ \underbrace{5x^3}_{2}\ \underbrace{25x^2}_{3}\ \underbrace{125}_{4}\ \underbrace{625}_{5}$$

Paso 5. Asignamos los signos a cada término, teniendo en cuenta las reglas, como el primer factor es una suma $(x + 5)$ los signos $+$ y $-$ deben alternarse en los términos del polinomio:

Respuesta

$x^5 + 3125$ puede expresarse como el producto de dos factores:

Enunciado

- Factorizar $x^8 - 81y^4$

Solución

Paso 1. Identificamos $n = 4$, par y observamos que se tiene la suma de dos cuartas potencias, de x^2 y de $3y$: $x^8 - 81y^4 = (x^2)^4 - (3y)^4$

Paso 2. Formamos un binomio con los resultados obtenidos. En este caso, como tenemos una diferencia de potencias pares $x^8 - 81y^4$, el binomio puede ser la suma o la diferencia de los términos:

$$x^2 + 3y$$

$$x^2 - 3y$$

Paso 3. Formamos el segundo factor, que es un polinomio de $(n = 4)$ términos. El primero y el último término del polinomio serán x^2 y $3y$, respectivamente, elevados a la $4 - 1 = 3$

$$\underbrace{(x^2)^3}_{1}\ \underbrace{\quad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{3}\ \underbrace{(3y)^3}_{4}$$

$$\underbrace{x^6}_{1}\ \underbrace{\quad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{3}\ \underbrace{27y^3}_{4}$$

Paso 4. Escribimos los términos 2 y 3 del polinomio, con las potencias de x^2 y $3y$:

$$\underbrace{x^6}_{1}\ \underbrace{3yx^4}_{2}\ \underbrace{(3y)^2x^2}_{3}\ \underbrace{27y^3}_{4}$$

$$\underbrace{x^6}_{1}\ \underbrace{3yx^4}_{2}\ \underbrace{9x^2y^2}_{3}\ \underbrace{27y^3}_{4}$$

Paso 5. Asignamos los signos a cada término, teniendo en cuenta las reglas, si el primer factor es una suma x^2+3 y los signos $+$ y $-$ deben alternarse en los términos del polinomio

$$x^6-3x^4y+9x^2y^2-27y^3$$

Y si el primer factor es una diferencia x^2-3, todos los términos del polinomio son positivos: $x^6+\ 3x^4y+9x^2y^2+27y^3$

Respuesta

x^8-81y^4 y puede expresarse como el producto de dos factores así:

$x^8-81y^4=$

$$(x^2+3y)(x^6-3x^4y+9x^2y^2-27y^3)$$

ó también:

$x^8-81y^4=$

$$(x^2-3y)(x^6+3x^4y+9x^2y^2+27y^3)$$

Practico

1. Factoriza los siguientes binomios:

   a. m^7-n^7

   b. $243\ -\ 32b^5$

   c. $1-128a^7$

   d. $x^{10}\ +\ 32y^5$

   e. a^5+1

   f. a^5-1

   g. $1-x^5$

   h. a^7-b^7

2. Factoriza las siguientes sumas de cubos perfectos:

   a. $8(a+b)^3+(a-b)^3$

   b. $1+(x+y)^3$

   c. $(m-2)^3+(m-3)^3$

   d. $(x+2y)^3+1$